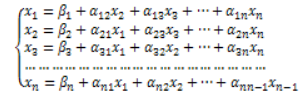
Індивідуальне завдання №6

**Метод простої ітерації**

Подамо систему лінійних алгебраїчних рівнянь у вигляді:

 (1)

або скорочено:

 (2)



Вибираємо початкову точку і будуємо ітераційний процес для системи (1).

Отримуємо ітераційну послідовність точок n -вимірного простору:



Щоб послідовність була збіжною, достатньо виконання однієї з таких

умов:

а) , тобто, максимальна із сум модулів коефіцієнтів при невідомих в правій частині системи (1), взятих по рядках, повинна бути менша одиниці;



б) , тобто максимальна із сум коефіцієнтів при невідомих в правій частині системи (2), взятих по стовпчиках, повинна бути менша одиниці;

в) , тобто сума квадратів коефіцієнтів при невідомих в правій частині системи (2) повинна бути менша одиниці.

При цих умовах процес ітерації для даної системи збігається до єдиного розв’язку незалежно від вибору початкового вектора.

Алгоритм численного рішення СЛАР методом простої ітерації:

1. Приводимо систему до вигляду, зручного для ітераційного процесу.
2. Порахуємо В і елементи:

,, (3)

1. Обчислимо норму матриці В:

(4)

Якщо >1, то ітераційний процес розходиться.

Якщо <1, то обчислення продовжується.

1. Обчислим:

(5)

1. Порахуємонеобхідну кількість ітерацій для досягнення потрібної точності ε.
2. Обираємо .
3. Обчислим:

xk+1 = B + , (6)

Коли k = m, зупиняємо ітераційний процес.

**Рішення:**

Початкова матриця має вигляд**:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| -0.82 | -0.34 | -0.12 | 0.15 | 1.3 |
| 0.11 | -0.77 | -0.45 | 0.32 | -0.84 |
| 0.05 | -0.12 | -0.86 | -0.18 | 1.16 |
| 0.12 | 0.08 | 0.06 | -1 | -0.57 |

Нехай x0=β, тоді:  
x1=b - a x0  
x2=b - a x1  
....  
xk+1=b - a xk

Приведемо до виду:

x1=-1.585+0.41x2+0.15x3-0.18x4  
x2=1.091-0.14x1+0.58x3-0.42x4  
x3=-1.349-0.0581x1+0.14x2+0.21x4  
x4=0.57-0.12x1-0.08x2-0.06x3

Обчислення закінчуються за критерієм:

https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=max|x_%7bi%7d%5e%7bk%7d-x_%7bi%7d%5e%7bk%2B1%7d|%20%3C%20\frac%7b1-a%7d%7ba%7d\cdot%20\epsilon

де a=max ∑|rij|

a = 0.143+0.584+0.416 = 1.1429

https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=max|x_%7bi%7d%5e%7bk%7d-x_%7bi%7d%5e%7bk%2B1%7d|%20%3C%20\frac%7b1-1.1429%7d%7b1.1429%7d\cdot%200.001%20=%20-0.00012503

Покажемо обчислення на прикладі кількох ітерацій:

N=1  
x1=-1.585 - 0 \* 0.415 - 0 \* 0.146 - 0 \* (-0.183)=-1.585  
x2=1.091 - 0 \* (-0.143) - 0 \* 0.584 - 0 \* (-0.416)=1.091  
x3=-1.349 - 0 \* (-0.0581) - 0 \* 0.14 - 0 \* 0.209=-1.349  
x4=0.57 - 0 \* (-0.12) - 0 \* (-0.08) - 0 \* (-0.06)=0.57

N=2  
x1=-1.585 - 1.091 \* 0.415 - (-1.349) \* 0.146 - 0.57 \* (-0.183)=-1.736  
x2=1.091 - (-1.585) \* (-0.143) - (-1.349) \* 0.584 - 0.57 \* (-0.416)=1.89  
x3=-1.349 - (-1.585) \* (-0.0581) - 1.091 \* 0.14 - 0.57 \* 0.209=-1.713  
x4=0.57 - (-1.585) \* (-0.12) - 1.091 \* (-0.08) - (-1.349) \* (-0.06)=0.386

N=3  
x1=-1.585 - 1.89 \* 0.415 - (-1.713) \* 0.146 - 0.386 \* (-0.183)=-2.048  
x2=1.091 - (-1.736) \* (-0.143) - (-1.713) \* 0.584 - 0.386 \*

\* (-0.416)=2.004  
x3=-1.349 - (-1.736) \* (-0.0581) - 1.89 \* 0.14 - 0.386 \* 0.209=-1.794  
x4=0.57 - (-1.736) \* (-0.12) - 1.89 \* (-0.08) - (-1.713) \* (-0.06)=0.41

Остальные расчеты сведем в таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | x1 | x2 | x3 | x4 | e1 | e2 | e3 | e4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |
| 1 | -1.585 | 1.091 | -1.349 | 0.57 | 1.585 | 1.091 | 1.349 | 0.57 |
| 2 | -1.736 | 1.89 | -1.713 | 0.386 | 0.151 | 0.799 | 0.364 | -0.184 |
| 3 | -2.048 | 2.004 | -1.794 | 0.41 | 0.312 | 0.115 | 0.0817 | 0.024 |
| 4 | -2.079 | 2.017 | -1.833 | 0.377 | 0.0312 | 0.0132 | 0.0391 | -0.0331 |
| 5 | -2.085 | 2.022 | -1.83 | 0.372 | 0.00581 | 0.00465 | -0.00328 | -0.00503 |
| 6 | -2.088 | 2.017 | -1.83 | 0.372 | 0.00333 | -0.00484 | -6.6E-5 | -0.000129 |
| 7 | -2.086 | 2.017 | -1.83 | 0.371 | -0.00197 | -0.000568 | -0.000508 | -0.000782 |
| 8 | -2.086 | 2.016 | -1.829 | 0.371 | -1.8E-5 | -0.00034 | -0.000358 | 0.000222 |

Для оцінки похибки обчислюємо коефіцієнт α:

max[∑|αij|] = 0.143+0.584+0.416 = 1.143> 1  
max[|x7,x8|] = ρ(x7, x8) = |0.371 - 0.371| = 0.000358

Обчислюємо похибку:

https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\rho%20(x,%20x%5e%7b8%7d)%20\le%20\frac%7b\alpha%20%7d%7b1-\alpha%20%7d\rho%20(x%5e%7b7%7d,%20x%5e%7b8%7d)%20=%20\frac%7b1.143%7d%7b1%20-%201.143%7d0.000358%20\le%20-0.00286

Значення:

-2.0859323 2.0163085 -1.8291627 0.3712467

Різниця:

0.0000179 0.0003405 0.0003576 0.0002217

Корені рівняння:

-2.0859323

2.0163085

-1.8291627

0.3712467

**Протокол рішення в Scilab**

disp("Решение СЛАУ методом простой итерации")

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| A=[-0.82 | -0.34 | -0.12 | 0.15 | 1.3 |
| 0.11 | -0.77 | -0.45 | 0.32 | -0.84 |
| 0.05 | -0.12 | -0.86 | -0.18 | 1.16 |
| 0.12 | 0.08 | 0.06 | -1 | -0.57 |

];

disp("Введена матрица с коэффициентами в левой части:")

disp(A)

B = [2.24; 1.15; -0.72; 3.17];

disp("Введена матрица с коэффициентами в правой части:")

disp(B)

AB = [A B]

eps = 0.001

disp('Заданная точность равна e = '+string(eps))

for i=1:size(A, 'r')

a(i,1:4) = -AB(i,1:4)/AB(i,i)

a(i,i)=0

b(i,1)=AB(i,5)/AB(i,i)

end

t=[]

X0=[0; 0; 0; 0]

k=1

X1=a\*b+b

disp('Итерация №'+string(k)+':')

disp('Значения:')

disp(string(X1(1))+' '+string(X1(2))+' '+string(X1(3))+' '+string(X1(4)))

while norm(X1-X0)>eps

k=k+1

disp('Итерация №'+string(k)+':')

X0=X1

X1=a\*X0+b

disp('Значения:')

disp(string(X1(1))+' '+string(X1(2))+' '+string(X1(3))+' '+string(X1(4)))

disp('Разница:')

disp(string(abs(X1(1)-X0(1)))+' '+string(abs(X1(2)-X0(2)))+' '+string(abs(X1(3)-X0(3)))+' '+string(abs(X1(4)-X0(4)))+' ')

end

disp("Корни уравнения:")

disp(X1)

**Виведення в консолі:**

-->

Решение СЛАУ методом простой итерации

Введена матрица с коэффициентами в левой части:

-0.82 -0.34 -0.12 0.15 1.3

0.11 -0.77 -0.45 0.32 -0.84

0.05 -0.12 -0.86 -0.18 1.16

0.12 0.08 0.06 -1. -0.57

Введена матрица с коэффициентами в правой части:

2.24

1.15

-0.72

3.17

AB =

-0.82 -0.34 -0.12 0.15 1.3 2.24

0.11 -0.77 -0.45 0.32 -0.84 1.15

0.05 -0.12 -0.86 -0.18 1.16 -0.72

0.12 0.08 0.06 -1. -0.57 3.17

eps =

0.001

Заданная точность равна e = 0.001

a =

-1. -0.4146341 -0.1463415 0.1829268

a =

0. -0.4146341 -0.1463415 0.1829268

b =

-1.5853659

a =

0. -0.4146341 -0.1463415 0.1829268

0.1428571 -1. -0.5844156 0.4155844

a =

0. -0.4146341 -0.1463415 0.1829268

0.1428571 0. -0.5844156 0.4155844

b =

-1.5853659

1.0909091

a =

0. -0.4146341 -0.1463415 0.1829268

0.1428571 0. -0.5844156 0.4155844

0.0581395 -0.1395349 -1. -0.2093023

a =

0. -0.4146341 -0.1463415 0.1829268

0.1428571 0. -0.5844156 0.4155844

0.0581395 -0.1395349 0. -0.2093023

b =

-1.5853659

1.0909091

-1.3488372

a =

0. -0.4146341 -0.1463415 0.1829268

0.1428571 0. -0.5844156 0.4155844

0.0581395 -0.1395349 0. -0.2093023

0.12 0.08 0.06 -1.

a =

0. -0.4146341 -0.1463415 0.1829268

0.1428571 0. -0.5844156 0.4155844

0.0581395 -0.1395349 0. -0.2093023

0.12 0.08 0.06 0.

b =

-1.5853659

1.0909091

-1.3488372

0.57

t =

[]

X0 =

0.

0.

0.

0.

k =

1.

X1 =

-1.7360349

1.8895929

-1.7125318

0.3860986

Итерация №1:

Значения:

-1.7360349 1.8895929 -1.7125318 0.3860986

k =

2.

Итерация №2:

X0 =

-1.7360349

1.8895929

-1.7125318

0.3860986

X1 =

-2.0476134

2.004191

-1.7942449

0.4100913

Значения:

-2.0476134 2.0041910 -1.7942449 0.4100913

Разница:

0.3115785 0.1145981 0.0817131 0.0239927

k =

3.

Итерация №3:

X0 =

-2.0476134

2.004191

-1.7942449

0.4100913

X1 =

-2.0787827

2.0174052

-1.8333721

0.376967

Значения:

-2.0787827 2.0174052 -1.8333721 0.3769670

Разница:

0.0311694 0.0132142 0.0391272 0.0331244

k =

4.

Итерация №4:

X0 =

-2.0787827

2.0174052

-1.8333721

0.376967

X1 =

-2.0845952

2.022053

-1.8300951

0.3719362

Значения:

-2.0845952 2.0220530 -1.8300951 0.3719362

Разница:

0.0058125 0.0046478 0.0032770 0.0050308

k =

5.

Итерация №5:

X0 =

-2.0845952

2.022053

-1.8300951

0.3719362

X1 =

-2.0879222

2.0172168

-1.8300286

0.3718071

Значения:

-2.0879222 2.0172168 -1.8300286 0.3718071

Разница:

0.0033270 0.0048362 0.0000665 0.0001291

k =

6.

Итерация №6:

X0 =

-2.0879222

2.0172168

-1.8300286

0.3718071

X1 =

-2.0859502

2.016649

-1.8295202

0.371025

Значения:

-2.0859502 2.0166490 -1.8295202 0.3710250

Разница:

0.0019719 0.0005678 0.0005084 0.0007821

k =

7.

Итерация №7:

X0 =

-2.0859502

2.016649

-1.8295202

0.371025

X1 =

-2.0859323

2.0163085

-1.8291627

0.3712467

Значения:

-2.0859323 2.0163085 -1.8291627 0.3712467

Разница:

0.0000179 0.0003405 0.0003576 0.0002217

Корни уравнения:

-2.0859323

2.0163085

-1.8291627

0.3712467

**Висновок**:

Можна помітити, що при знаходженні відповідей рішення системи є невеликі розбіжності. Тому, що рахуючи вручну ми використовуємо ε = 0,001 (припустиме наближення).

Література:

1. Методи обчислень: навчально-методичний посібник для студентів фізико-математичного факультету / Б.М. Ляшенко, О.М. Кривонос, Т.А. Вакалюк.- Житомир Вид-во ЖДУ ім. І. Франка 2014. – 224с. (Укр.мов.) ст. 39 -42

2. http://www.mathros.net.ua/nablyzhenyj-rozvjazok-systemy-linijnyh-rivnjan-metodom-prostoi-iteracii.html 26.11.17.

3. Чисельні методи : навчальний посібник / В. М. Задачин, І. Г. Конюшенко. – Х.: Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 180 с. (Укр. мов.) ст. 23-26